Gödel ja aritmetiikan epätäydellisyys

10.11.2006/ XV ammattikorkeakoulujen matematiikan päivät
Tenho Vanhanen, Stadia

Johdanto

- 100 vuotta **Kurt Gödelin** (28.4.1906 - 14.1.1978) syntymästä
- 75 vuotta epätäydellisyystulosten julkaisemisesta 1931
- Loogikko Gödel keskittyi työssään vain kaikkein vaikeimpiin kysymyksiin
- Tuloksia:
  - o Predikaattilogiikan täydellisyys (1930)
  - o Joukko-opin valinta-aksiooman ja kontinuumihypoteesin suhteellinen ristiriidattomuus (1937)
  - o **Aritmetiikan epätäydellisyys, ensimmäinen ja toinen lause** (1931)

1. epätäydellisyyslause: Jokaisessa riittävän vahvassa formalisoidussa matemaattisessa teoriassa on lauseita, jotka ovat tosia mutta joita ei voi todistaa kyseisessä järjestelmässä ("Totuutta ja todistuvuutta ei voida samaistaa")
2. epätäydellisyyslause: Lausetta, joka ilmaisee kyseisen teorian ristiriidattomuuden, ei voida todistaa tässä teoriassa.

- Matemaattinen logiikka ⇋ insinöörikoulutuksen matematiikka

■ Paradoksi

Matemaattisen logiikan suhde matematiikkaan, fysiikkaan ja tietojenkäsittelytieteeseen on ollut hämärä ja täynnä paradokseja. Esimerkiksi, eräät piirit ovat kaupitelleet Gödelin teoreemaa vuosisadan tärkeimpänä matemaattisena tuloksena, kun se toisaalta on jäänyt lähes merkityksettömäksi matematiikan tutkijoiden työssä. Miksi tiukka logiikan kurssi ei ole pakollinen kaikille matematiikan pääaineopiskelijoille?

- Phipp J. Davis, Is It Boole that Makes The World Go Round? Kirja-arvostelu 16.5.2000, SIAM News   (SIAM: Society for Industrial and Applied Mathematics)

Gödelin 1. ja 2. epätäydellisyyslause

Über formal unentscheidbare Sätze der Principia Mathematica und verwandter Systeme I. Monatshefte für Mathematik und Physik 38 (1931), vol. 38, pp. 173-198. (Principia Mathematican ja sen kaltataisten järjestelmien muodollisesti ratkeamattomista lauseista.)

Gödelin P = Peanon aksioomat + Principia Mathematican logiikka

■ Ensimmäinen epätäydellisyyslause

Jokaista ω-ristiriidatonta rekursiivista *kaavaluokkaa c* vastaa rekursiiviset *luokkasymbolit* r siten, että kumpikaan luvuista *v* Gen *r* tai Neg (*c* Gen *r*) ei kuulu joukkoon Flg (c) (missä *v* on *r*:n *vapaa muuttuja*).

■ Ensimmäisen epätäydellisyyslauseen tulkinta:

Formalisoitu aritmetiikka on epätäydellinen: on olemassa tämän teorian lause U, jolle pätee se, että kumpikaan lauseista U tai ¬U ei ole todistuva.

■ Toinen epätäydellisyyslause

Jos P on ristiriidaton, niin lause Con_P ei ole todistuva P:ssä.

Tässä Con_P on P:n lause, joka koodausen välityksellä sanoo, että P on ristiriidaton.

Kansalaisuus, väitöskirja, Habilitationsschrift

■ Gödelin kansalaisuus

- Kurt Gödel syntyi Brnon kaupungissa, Itävalta-Unkarin kaksoismonarkiassa, vanhemmat puhuivat saksaa
- 12-vuotiaana Tsekkoslovakian kansalainen I-U:n hajottua
- 23-vuotiaana opiskelijana valitsi itse Itävallan kansalaisuuden
- 32-vuotiaana automaattisesti Saksan kansalaiseksi Hitlerin liitettyä Itävallan Saksaan
- 42-vuotiaana sai Yhdysvaltain kansalaisuuden. Oli muuttanut 1939-40 Yhdysvaltoihin

- Wienin yliopistoon, vaihtoi teoreettisen fysiikan matematiikkaa
- Wienin piiri: Moritz Schlick, Rudolf Carnap, Hans Hahn. Looginen empirismi → Suomi / Eino Kaila.

■ Väitöskirja

- Avoin ongelma Hilbert-Ackermannin logiikan oppikirjassa: Onko logiikan järjestelmä täydellinen?
- Gödel todisti väitöskirjassaan 1. kertaluvun predikaattikalkyylin täydellisyyden.

■ Habilitationsschrift

- Wienin yliopistossa dosentin pätevyyten tarvittiin väitöskirjan jälkeen kirjoitettu *Habilitationsschrift*
- Hilbertin ohjelma näytti tarjoavan haasteita nuorelle miehelle.

Hilbertin ohjelma

- **Logisismi**: matematiikka voidaan palauttaa logiikkaan. Gottlob Frege: Begriffschrift. Bertrand Russell & A.N.Whitehead: Principia *Mathematica*.

- **Intuitionismi**: matematiikka on mentaalisten konstruktioiden tulos. L.E.J.Brouwer (1881-1966).

- **Formalismi** (todistusteoria, metamatematiikka, Hilbertin ohjelma)
    o aksiomatisointi
    o teoria + looginen päättely formalisoidaan, jotta
    o voidaan todistaa teorian ristiriidattomuus.

Hilbertin ohjelma: Todistetaan 1. aritmetiikan 2. analyysin ... n. koko matematiikan ristiriidattomuus.
Hilbert optimistinen Bolognan matemaatikkokongressissa 1928: PA:n ristiriidattomuus OK, analyysin ristiriidattomuus viittä vaille valmis.

Gödelin tehtävä todistaa Peanon aritmetiikka vahvempien järjestelmien suhteellinen ristiriidattomuus PA:n suhteen. Jos onnistuisi, Hilbertin 2. probleema (Pariisin matemaatikkokongressi 1900) olisi ratkaistu. Kävi toisin

Königsbergin symposium

- Aihe: matematiikan perusteet
- 1. päivä: Carnap esittelee logisismin, Heyting intuitonismin ja John von Neumann formalismin saavutukset
- 3. päivä: Pyöreän pöydän keskustelussa Gödel pudottaa pommin. Jokaisessa formaalissa järjestelmässä, jossa voidaan esittää luonnollisten lukujen keskeiset ominaisuudet, on aina lauseita, joita ei voida todistaa eikä kumota kyseisessä järjestelmässä, mutta jotka järjestelmän ulkopuolelta tarkastellen ovat tosia.
- Pommi uhkaa jäädä suutariksi, von Neumannia lukuunottamatta kukaan ei huomaa mitään erikoista

Gödelin todistukset

■ Formalisoitu matemaattinen teoria

Tässä esimerkkinä lukuteoria eli Peanon aritmetiikka.
Symbolit:
- vakiosymbolit 0
- muuttujat v_1, v_2, ...
- funktiosymbolit +, ×, S
- relaatiosymbolit (ei ole)
- identtisyyssymboli =
- symbolit konnektiiveille ¬, ∧, ∨
- kvanttorisymbolit ∀, ∃
- sulkumerkit (,)

Termit, kaavat ja lauseet ovat merkkijonoja. Esim. $v_1 + 0$, $v_1 + 0 = v_1$ ja $((\forall v_1)\ (v_1 + 0 = v_1))$
Aksioomat: formalisoidut Peanon aksioomat + loogiset aksioomat
Päättelysäännöt: Modus Ponens, universaali yleistys, ...
Todistus: Kaavajono A_1, A_2, ..., A_n jonka jokainen jäsen on joko aksiooma tai saatu päättelysäännöllä jonon aiemmista jäsenistä.

■ Teoriaan liittyviä käsitteitä

Tässä esimerkkinä lukuteoria eli Peanon aritmetiikka.

- Teoria T on ristiriidaton, jos mikään muotoa (A ∧ ¬A) oleva lause ei ole todistuva
- Teoria T on täydellinen, jos se ratkaisee jokaisen lauseen eli A on todistuva tai ¬A on todistuva, kaikilla lauseilla A.

■ Gödel-luvut

Merkkiin liitetään luku, sen Gödel-luku. Esim. $0 \mapsto 3$, $+ \mapsto 4$, $\times \mapsto 5$, ...
Merkkijonoon liitetään Gödel-luku seuraavasti: esim. $0+0\times \mapsto 2^3\ 3^4\ 5^3\ 7^5$
Jonoon, jonka jäsenet ovat merkkijonoja, liitetään Gödel-luku samalla tavalla.

Koodauksen keskeinen idea:
- Formalisoitu teoria T otetaan matemaattisen tarkastelun kohteeksi. Toimitaan siis T:n ulkopuolella
- Jos T on riittävän rikas (voidaan esittää osa lukuteoriasta), niin koodauksen välityksellä T:n ulkopuolella tehdyt tarkastelut voidaan tuoda T:n sisäpuolelle.

■ Todistuksen keskeiset kohdat

Ratkaiseva askel Gödelin todistuksessa oli osoittaa, että

luonnollisen luvun ominaisuus ”olla P:ssä todistuvan lauseen Gödel-luku” on itse ilmaistavissa P:ssä.

Tämän tuloksen avulla Gödelin onnistui muotoilla P:ssä sellaisia lauseita A, jotka koodikielelle muunnettuna ilmaisivat, että jokin lause B ei ole todistuva. Sille, joka ei ole perillä koodauksesta, lause A näyttää luonnollisia lukuja koskevalta mutkikkaalta ja mystiseltä ilmaukselta. Mutta koodin tuntevalle kaikki salaperäisyys katoaa: merkkijono A ilmaisee lauseen, että erään merkkijonon B ilmaisema lause ei ole todistuva P:ssä. Tavallisesti A ja B ilmaisevat eri asioita. Gödel uskalsi kysyä, voisivatko A ja B ilmaista saman asian. Vastaus on myönteinen, minkä Gödel onnistui todistamaan. Todistuksessa hän käytti Georg Cantorilta opittua matemaattista temppua, jota kutsutaan diagonaalimenetelmäksi.

Gödel löysi siis lauseen U, jolla on seuraavat ominaisuudet
- Lause U sanoo, että eräs lause ei ole todistuva P:ssä
- Kyseinen lause on U
- Siis lause U sanoo, että ”U ei ole todistuva P:ssä”

Katsotaan mitä tästä seuraa. Seuraavassa oletetaan, että P on terve järjestelmä siinä mielessä, että jokainen lause jolla on todistus P:ssä, on tosi.

Jos U olisi epätosi, niin se mitä U sanoo, ei pidä paikkaansa, jolloin U olisi todistuva P:ssä. Edellä tehdyn oletuksen perusteella U on tosi. Tämä ristiriita osoittaa, että U on tosi. Tällöin se mitä U sanoo, pitää paikkansa, joten U ei ole todistuva P:ssä. Siis

1. U on tosi lause
2. U ei ole todistuva P:ssä.

Koska U on tosi, on sen negaatio ¬U on epätosi. Siten

3. ¬U ei ole todistuva P:ssä.

Voidaan siis sanoa, että P ei ratkaise lausetta U. Ja koska P:ssä on tällainen lause

4. P on epätäydellinen.

Edelläoleva luonnehtii ensimmäisen epätäydellisyyslauseen todistusta. Tarkastellaan sitten toisen epätäydellisyyslauseen todistusta.

Lauseen U nähtiin olevan tosi vaikkakin todistumaton P:ssä. Palautetaan mieleen, että järjestelmä P sisältää Principia Mathematican logiikan. Koska PM on hyvin ilmaisuvoimainen, herää kysymys: eikö päättelyä, jolla U osoitettiin todeksi, voida esittää P:ssä. Gödel huomasi sen olevan miltei mahdollista. Nimittäin P:n puitteissa voidaan todistaa, että

- jos P on ristiriidaton, niin U.

Lauseen U todistus jää siten kiinni vain P:n ristiriidattomuudesta. Koska tiedetään, että U ei ole todistuva P:ssä seuraa johtopäätös:

5. P:n ristiriidattomuus ei ole todistuva P:ssä.

Johtopäätöksiä

■ Hilbertin ohjelma oli tullut tiensä päähän

Yksi Hilbertin ohjelman keskeisiä tavoitteita oli todistaa Principia Mathematican kaltaisten järjestelmien ristiriidattomuus käyttämällä vain ääreellisiä (finitaarisia) menetelmiä. Nämä menetelmät olisivat olleet vain osa PM:n tarjoamista välineistä. Gödel oli kuitenkin osoittanut, että edes ilmaisuvoimainen PM (tai P) ei riitä oman ristiriidattomuutensa todistamiseen. Rehellinen johtopäätös oli se, minkä von Neumann teki: Hilbertin ohjelma oli tullut tiensä päähän ainakin alkuperäisessä muodossaan. Gödel itse ei ollut aivan näin jyrkkä. Työnsä viimeistä edellisessä kappaleessa hän toteaa, että toinen epätäydellisyyslause ei ole ristiriidassa Hilbertin formalistisen näkökulman suhteen. Gödelin mukaan voisi olla olemassa P:n ristiriidattomuuden äärellisiä todistuksia, joita ei voi lausua P:ssä.

Olen kuullut sanottavan, että Gödel oli jossain mielessä formalismin ja Hilbertin ohjelman vastustaja. Jos tämä tarkoittaa, että Gödel tutkimus lähtökohdaltaan olisi ollut toditusteorian periaatteiden ulkopuolella ja tavoitteet olisi suunnattu jotenkin Hilbertin ohjelmaa vastaan, niin ollaan pahasti hakoteillä. Gödel päinvastoin omaksui työssään täydellisesti Hilbertin ohjelman näkökulman. Hän vain oivalsi, mitä oletuksista seuraa ja oli valmis työstämään päättelyt loppuun asti vaikka tulokset eivät olleetkaan kovin miellyttäviä formalismin koulukunnan näkökulmasta katsoen.

■ Totuutta ei voi samaistaa todistuvuuteen matematiikassa

Wienin piirin luottamus formalismin kaikkivoipaisuuteen on kestämätön

■ Todistuksen paradoksaalinen sävy

Epätäydellisyyslauseiden todistuksien kuvailussa käytetty heuristinen päättely ei luonnollisesti täytä matemaattiselle päättelylle asetettavia vaatimuksia. Gödel kävi kuitenkin työssään huolellisesti läpi kaikki yksityiskohdat eikä jättänyt tässä suhteessa moitteelle sijaa. Kaikesta huolimatta paradoksin häivä jäi leijumaan todistuksen ylle. Oli vaikea uskoa, että päättelyllä, jossa on ajanvietematematiikalle tyypillisiä käänteitä, voitaisiin todista matematiikassa mitään kovinkaan syvällistä.

Vastaus tähän moitteeseen on kaksiosainen. Ensiksi, onko tarpeen tehdä ero ”viihdyttävän matematiikan” ja ”vakavan matematiikan” välillä? Mitkä ovat johtopäätokset, jos erottelu tehdään? Onko esimerkiksi se, että miljoonat ihmiset päivittäin täyttävät Sudoku-ruudukkoja aikansa kuluksi, tehnyt kokonaisluvuista 1,…,9 jotenkin epäilyttäviä olioita, joihin vakavasti työhönsä suhtautuvan matemaatikon ei enää tulisi kajota?

Toiseksi, laskettavuuden teoria (tai rekursioteoria), joka syntyi 1930-luvulla ja jonka kehittymiseen Gödelin työ vaikutti positiivisesti, tarjoaa käsitteitä, joiden avulla Gödelin lauseet saavat hieman abstraktimman muotoilun Gödelin artikkelissa käytettyyn muotoiluun verrattuna. Samalla päättelyistä häviää ajanvietematematiikan leima. Rekursioteoreettista formulointia käytetään useissa oppikirjoissa, esimerkkinä Väänänen: Matemaattinen logiikka.

■ On esimerkkejä "oikeista" Peano-aritmetiikan lauseista, jotka eivät ole todistuvia

Jeff Paris & Leo Harrington todistivat 1977 äärellinen Ramseyn lauseen lievästi modifioitu versio on tosi mutta sitä ei voi todistaa PA:ssa.

■ Gödelin lauseiden käytännönen merkityksestä

Mitä hyötyä siis Gödelin nerokkaista oivalluksista on ollut konstruoitaessa satamanostureita, suunniteltaessa sairaalan leikkaussalia tai rakennettaessa tietoverkkoja?

Nämä ovat paisi hyviä kysymyksiä, kysymyksiä, joihin voidaan vastata.

■ Gödel Pricetonissa

Tultuaan nimitetyksi dosentiksi Wienin yliopistoon helmikuussa 1933 Gödel sai tarjouksen viettää akateeminen vuosi 1933-34 vastikään Princetoniin perustetussa Institute for Advanced Studyssa. Princetoniin keskittyi 1930-luvulla niin paljon matemaattista lahjakkuutta, että se ohitti lopulta Göttingenin matemaattisen maailman keskuksena (Weyl, Einstein, von Neumann).

Gödel otti tarjouksen vastaan ja matkusti Yhdysvaltoihin. Keväällä 1934 Princetonin IAS:ssa pitämillään luennoilla hän otti käyttöön yleisen rekursiivisuuden käsitteen. Käsite oli tarkoitettu täsmälliseksi matemaattiseksi vastineeksi algoritmisesti laskettavissa olevan funktion käsitteelle. Samassa tarkoituksessa oli Pricetonissa työskentelevä Alonzo Church oppilaansa Stephen Kleenen kanssa ottanut käyttöön lambda-määriteltävyyden käsitteen. Englantilainen Alan Turing oli samoihin aikoihin määritellyt nk. Turingin koneen, jonka avulla algoritminen laskettavuus voitiin myös eksplikoida kolmannella, kahden muun käsitteen kanssa yhtäpitävällä tavalla.

■ Laskettavuuden teorian synty. Tietokone

Oli syntynyt uusi matematiikan tai nykyisin teoreettisen tietojenkäsittelytieteen ala: laskettavuuden teoria. Työ merkitsi teoreettisen perustan luomista fyysiselle tietokoneelle. Ratkaisevan panoksen toi Turingin kehittämä algoritmisen laskettavuuden malli. Turingin työssä on näkyvissä Gödelin epätäydellisyys-artikkelista saadut vaikutteet. Näitä ovat diagonaalipäättelyn käyttö sekä kokonaislukujen kaksoisrooli toisaalta datan ja toisaalta ohjelmien esittämisessä.

Tietokoneilla ja tietokoneohjelmilla on ratkaiseva merkitys konstruoitaessa satamanostureita, suunniteltaessa sairaalan leikkaussalia tai rakennettaessa tietoverkkoja?

Lähteet

[1] Davis, M. Tietokoneen esihistoria Leibnizista Turingiin. Vantaa 2003.

[2] Davis, M. The Incompleteness Theorem. Notices of the AMS. Vol 53, Number 4. (Internetissä)

[3] Feferman, S. The Impact of the Incompleteness Theorems on Mathematics. Notices of the AMS. Vol 53, Number 4. (Internetissä)

[4] Gödel, K. On Formally Undecidable Propositions of Principia Mathematica and Related Systems. Teoksessa []

[5] Hawking, S.(ed.) God Created the Integers. Philadelphia, London 2005.

Keskustelu